16.1.9

IV. Quadratische Funktionen

1. Rechnen mit Wurzeln

$\sqrt{a}$ ist diejenige nicht-negative Zahl, für die gilt: $(\sqrt{a})^2 = a$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

z.B. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

$$\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$$

Beachte:

$\sqrt{25 \cdot 36} = 30$

$\sqrt{25+36} = \sqrt{61}$ UNGLEICH!

$\sqrt{25} + \sqrt{36} = 5+6 = 11$

a) Teilweises radizieren

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{4k} = \sqrt{4}\sqrt{k} = 2\sqrt{k}$$

Achtung: $\sqrt{4k^2} = 2\sqrt{k^2} = 2 \cdot |k|$

$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$ für $a \in \mathbb{R}$

z.B. $a = -3$; $\sqrt{(-3)^2} = 3 = -a$

$\sqrt{(1+k)^2} = |1+k|$

Fallunterscheidung:

$1+k \geq 0$: Betrag weglassen

$k \geq -1$ $\Longrightarrow$

2. Fall: $1+k < 0 \Leftrightarrow k < -1$

$| \quad | = -(\quad)$

$\sqrt{(1+k)^2} = -(1+k) = -k-1$

Erläuterung:

$k = -10$ (hier 2. Fall)

$\sqrt{(1+k)^2} \Rightarrow \sqrt{(1-10)^2} = \sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$

$\sqrt{(1+k)^2} = -k-1 \Rightarrow -(-10)-1 = 9$

$\sqrt{4(5k+10)^2} = 2|5k+10|$

Fallunterscheidung:

$5k+10 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -2$

Merke: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}}$

$(a^b)^2 = a^{2b}$

Damit $a^{3,5} = a^{\frac{7}{2}} = a^{7\cdot\frac{1}{2}} = (a^7)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^7}$

z.B. $\sqrt{10^3}\cdot\sqrt{10^7} = 10^{3/2}\cdot 10^{7/2} = 10^{\frac{3}{2}+\frac{7}{2}} = 10^5$

2. Quadratisch Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$;($a \neq 0$) nennt man **quadratische Gleichung** oder **Gleichung zweiten Grades.**
$x^2 + px + q = 0$ nennt man ihre **Hauptform.**

Spezialfälle:

1. **$b = 0$, also $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + q = 0$**

Für $q > 0$ hat die Gleichung sicher keine Lösung, weil die linke Seite insgesamt > Null ist.
Für $q = 0$ hat die Gleichung nur die Lösung $x = 0$.
Für $q < 0$ ergibt sich mit $d = -q$:

$$x^2 + p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \sqrt{d}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + \sqrt{d})(x - \sqrt{d}) = 0$$

Wir erinnern uns: Ein Produkt kann nur Null sein, wenn mindestens ein Faktor Null ist, also:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & x_1 = -\sqrt{d} \;\vee\; x_2 = \sqrt{d} \quad ;\ d > 0 \\ \text{Kürzer:} & x_{1/2} = \pm\sqrt{d} \end{array}}$$

Das Zeichen $\vee$ steht für „oder“.

Aufgaben:

2. a) $2x^2 = 8$ b) $0{,}5x^2 = 8$ c) $5x^2 - 45 = 0$
 d) $28 - 63x^2 = 0$ e) $\frac{x^2}{12} = \frac{1}{27}$ f) $\frac{x^2}{35} - \frac{7}{125} = 0$
 g) $\frac{13}{6} = \frac{78x^2}{49}$ h) $\frac{22}{3} - \frac{24x^2}{11} = 0$ i) $\frac{0{,}125x^2}{3} = \frac{1{,}5}{4}$

Beachte bei den folgenden Aufgaben die Definitionsmengen!

3. a) $\frac{4x-1}{x+1} = \frac{x-1}{4x+1}$ b) $\frac{2x-5}{3x+10} = \frac{x}{2x+10}$
 c) $\frac{x+10}{2x-5} + \frac{5x+4}{x+7} = 0$ d) $\frac{x+10}{2x+5} = \frac{5x-4}{x+7}$
 •e) $\frac{3x+2}{x+1} = \frac{7x+3}{2x+2}$ •f) $\frac{2x+7}{4x-6} = \frac{2x+2}{1{,}5-x}$
 g) $\frac{16x-1}{x+4} = \frac{4x+25}{2-9x}$ h) $\frac{3x+2}{2x-3} = \frac{11x+8}{5x-9}$

5. a) $\frac{3}{x+2} - 4 = \frac{3}{x-2}$
 c) $\frac{6x-8}{3x} + 2x = \frac{3x+4}{2} - x$
 b) $\frac{1}{5x+2} + \frac{4}{x-1} + 7 = 0$
 d) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1} + 2$

•6. Führe die notwendigen Fallunterscheidungen durch.
 a) $ax^2 = b^2$ b) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - a^2 = 0$
 c) $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ d) $a^2x^2 - a = b^2x^2 - b$
 e) $(3x-2a)^2 - (2x-3a)^2 = 4a^2$ f) $\frac{(bx-a)^2}{a^2} + \frac{2bx-a}{a} = b$

•7. Führe die notwendigen Fallunterscheidungen durch.
 a) $x^2 + a = b$ b) $ax^2 = b$
 c) $(x+2a)^2 + (2x-a)^2 = 5a$ d) $(3x-2a)^2 + 64 = (x-6a)^2$
 e) $a(x-b)^2 + ax(x+2b) = \frac{1}{a}$
 f) $(ax+b)^2 + (bx+a)^2 = 2a^2 + 2abx(x+2)$

8. a) $(x-7)^2 = 9$ b) $(x+2\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9}$ c) $(x+2)^2 = 2$
 d) $(0{,}5x-1{,}5)^2 = 2{,}25$ e) $(x-3)^2 = -3$ f) $(3-x)^2 = 3$
 g) $(x-a)^2 = b^2$ h) $(x+a)^2 = (2x+a)^2$

42 2) a) $2x^2 = 8 \quad | :2$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2 \quad ; \quad L = \{-2; 2\}$

b) $0,5x^2 = 8 \quad | \cdot 2$

$\Leftrightarrow x^2 = 16$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 4$

c) $5x^2 - 45 = 0 \quad | +45 | :5$

$\Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3$

d) $28 - 63x^2 = 0$

$\Leftrightarrow -63x^2 = -28$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{2}{3}$

e) $\frac{x^2}{12} = \frac{1}{27} \quad | \cdot 12$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{2}{3}$

f) $\frac{x^2}{35} - \frac{7}{125} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{35} = \frac{7}{125} \quad | \cdot 35$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{49}{25}$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{7}{5}$

g) $\frac{13}{6} = \frac{78x^2}{49} \quad | \cdot 49$

$x_{1/2} = \pm \frac{7}{6}$

h) $\frac{22}{3} - \frac{24x^2}{11} = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{4}} \frac{121}{36} = x^2$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{11}{6}$

- **2. Sonderfall:** $c = 0$, d.h. $ax^2 + bx = 0$

$ax^2 + bx = 0$

$\Leftrightarrow x(ax + b) = 0$ [Produkt 0, wenn 1 Faktor..]

$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a} \quad a$ immer $\neq 0$

Merke: $ax^2 + bx = 0$ hat immer 2 Lsg.:
$x_1 = 0 \lor x_2 = -\frac{b}{a}$

z.B.:

$x^2 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 5) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 5$

$2x^2 + 52x = 0$

$\Leftrightarrow x(2x + 52) = 0$

besser:

$2x(x + 26) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = -26$

$x^2 = x$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow$ Teile NIE durch x!

$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$

3. Die Allgemeine quadratische Gleich.

a) Satz von Vieta

Idee: Faktorisiere $x^2 + px + q =$

$= (x - x_1)(x - x_2)$; $x_1; x_2 \in \mathbb{R}$

z.B. $(x + A)(x + B) = x^2 + Ax + Bx + AB =$

$= x^2 + (A+B)x + AB$

$AB = q$

$A + B = p$

Beispiele:

$x^2 + 7x + 12 = 0$

3 u. 4 passt: $3 \cdot 4 = 12$

$3 + 4 = 7$

$(x+3)(x+4) = 0$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -4$

$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad \| \quad -3 \cdot (-4) = 12$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-4) = 0 \qquad -3 + (-4) = -7$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 4$

$x^2 + x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 1x - 12 = 0 \qquad -3 \cdot 4 = -12$

$-3 + 4 = +1$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+4) = 0$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -4$

$x^2 + 9x + 14 = 0$ $\quad 2 \cdot 7 = 14$, $2 + 7 = 9$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+7) = 0$

$x_1 = -2 \quad x_2 = -7$

$x^2 - 9x + 14 = 0$ $\quad -2 \cdot (-7) = 14$, $-2 + (-7) = -9$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-7) = 0$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 7$

$x^2 + 5x + 14 = 0$ $\quad \rightarrow -2 \cdot (-7) = 14 \leadsto -2 - 7 = -9$ ↯ ; $\rightarrow 2 \cdot 7 = 14 \leadsto 2 + 7 = 9$ ↯

↳ Lösung mit Vieta nicht sichtbar

$x^2 - 5x + 14 = 0$ ↯

$2x^2 + 26x + 44 = 0 \quad |:2$

$\Leftrightarrow x^2 + 13x + 22 = 0$ $\quad 2 \cdot 11 = 22$, $2 + 11 = 13$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+11) = 0$

$x_1 = -2 \quad x_1 = -11$

$\frac{1}{2}x^2 - x - 12 = 0 \quad | \cdot 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$ $\quad 6 \cdot (-4) = -24$, $6 - 4 = 2$

$\Leftrightarrow (x+4)(x-6) = 0$

$x_1 = -4 \quad x_1 = 6$

$\Longrightarrow$

b) Quadratische Ergänzung

z.B.: $(x+3)^2 = 25 \quad |\sqrt{}$

$\Leftrightarrow |x+3| = 5$

$\Leftrightarrow \pm(x+3) = 5 \quad | \cdot \pm 1$

$\Leftrightarrow x+3 = \pm 5$

$\Leftrightarrow x = -3 \pm 5$

$x_1 = -3-5 = -8$

$x_2 = -3+5 = 2$

> Stelle auf einer Seite eine BiFo her → Zielsetzung!

$x^2 + 7x + 12 = 0$

In Bifo: $a^2 \quad 2ba \quad b^2$

$x = a \quad 2b = 7$

$b = 3{,}5 \; ; \; 3{,}5^2 = b^2 = 12{,}25$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 7x + 3{,}5^2}_{(x+3,5)^2} - 3{,}5^2 + 12 = 0$

Quadr. Ergänzung zur BiFo.

$(x+3{,}5)^2 - 3{,}5^2 + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3{,}5)^2 = 3{,}5^2 - 12$

$\Leftrightarrow (x+3{,}5)^2 = 0{,}25 \quad |\sqrt{}$

$\Leftrightarrow x + 3{,}5 = \pm 0{,}5$

$\Rightarrow x_1 = -0{,}5 - 3{,}5 = -4$

$x_2 = +0{,}5 - 3{,}5 = -3$

 27.1.0

c) Die Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0 \qquad | :a$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \; ; \text{ quadr. Ergänzung}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad | \sqrt{}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall:

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0$$

$b^2 - 4ac$ nennt man Diskriminante D

$$\boxed{D < 0 \Rightarrow L = \{\}}$$

2. Fall:

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \qquad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$\boxed{\Rightarrow D = 0 \Rightarrow L = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}}$$

3. Fall

$b^2 - 4ac > 0$; $\boxed{D > 0}$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{b}{2a} \right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Beispiele:

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 4$$

oder:

$$D = b^2 - 4ac \Rightarrow 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2}$$

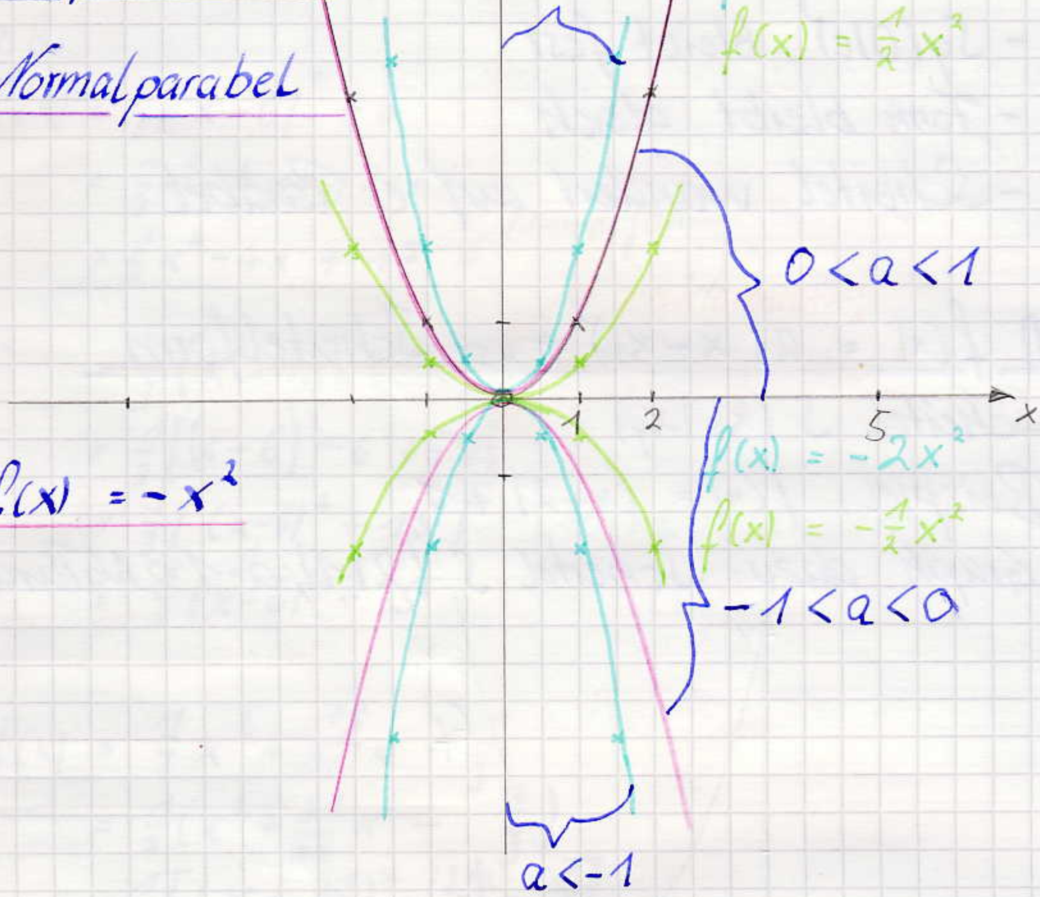
$$\underline{x_1 = -3}$$

$$\underline{x_2 = -4}$$

28.1.0

3. Die Graphen quadr. Funktionen

a) $f(x) = ax^2$



$|a| > 1$: Gestreckte Parabel (enger)

$0 < |a| < 1$: Gestauchte Parabel (breiter als NP)

$a > 0$: nach oben offen

$a < 0$: nach unten offen

b) $f(x) = ax^2 + c$

c verschiebt den Graphen nach oben ($c > 0$) bzw. nach unten ($c < 0$)

50

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$

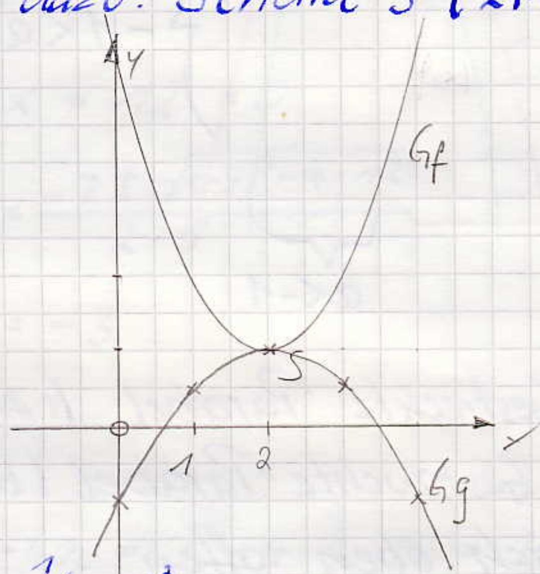
Veränderung von b
- $S_y(0|c)$ bleibt fest
- Form bleibt gleich
- Scheitel wandert auf e. Parabel

d) $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$: Scheitelform

Scheitel $S(x_s|x_y)$

Beispiel: $f(x) = (x-2)^2 + 1$

Graph dazu: Scheitel $S(2|1)$; $a = 1 \Rightarrow$ No.Para.



$g(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$.

Scheitel $S(2|1)$

unten offen,

gestaucht.

e) Scheitelform ⇔ Normalform

$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \Leftrightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$

z.B.

"⇒" $f(x) = \frac{1}{3}(x-6)^2 + 5$

$= \frac{1}{3}x^2 - 4x + 12 + 5$

$= \frac{1}{3}x^2 - 4x + 17$ ← Normalform

a ausklammern!

"⇐" $= \frac{1}{3}(x^2 - 12x + 51)$

quadr. Ergänzen!

$= \frac{1}{3}[(x-6)^2 - 6^2 + 51]$

$= \frac{1}{3}[(x-6)^2 + 15]$ — Ausmultiplizieren

$= \frac{1}{3}(x-6)^2 + 5$

$f(x) = \frac{1}{7}x^2 + \frac{13}{11}x - \frac{1}{9}$

$= \frac{1}{7}(x^2 + \frac{91}{11}x - \frac{7}{9})$

$= \frac{1}{7}[(x + \frac{91}{22})^2 - (\frac{91}{22})^2 - \frac{7}{9}]$

$= \frac{1}{7}(x + \frac{91}{22})^2 - 2{,}555$

$f_k(x) = (x - 3k)^2 + 5k^2$

$= x^2 - 6kx + 9k^2 + 5k^2$

$= x^2 - 6kx + 14k^2$

"⇐" $= (x - 3k)^2 - (3k)^2 + 14k^2$

$= (x - 3k)^2 + 5$

4. (Schnittpunkte)^2

$p(x) = ax^2 + bx + c$; $g(x) = mx + t$

a) y-Achse: $p(0) = y_S = c \rightsquigarrow S_y(0|c)$

b) x-Achse: $p(x) = 0$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (wenn möglich) ← Stellen

$N_1(x_1|0)$; $N_2(x_2|0)$ ← Koordinaten

c) 2 Graphen: $p(x) = g(x)$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = mx + t$

$\Leftrightarrow ax^2 + bx - mx + c - t = 0$ ⇒ Hauptform der Gleichung herstellen

$\Leftrightarrow ax^2 + (b-m)x + (c-t) = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2a}\left(-(b-m) \pm \sqrt{(b-m)^2 - 4a(c-t)}\right)$

↘ Stellen

$y_1 = p(x_1) = g(x_1) \rightarrow S_1(x_1|y_1)$

$y_2 = p(x_2) = g(x_2) \rightarrow S_2(x_2|y_2)$

↘ Koordinaten

Beispiele:

1. $f(x) = x^2 - 2x - 4$; $g(x) = -x^2$

a) Scheitelform v. Graphen

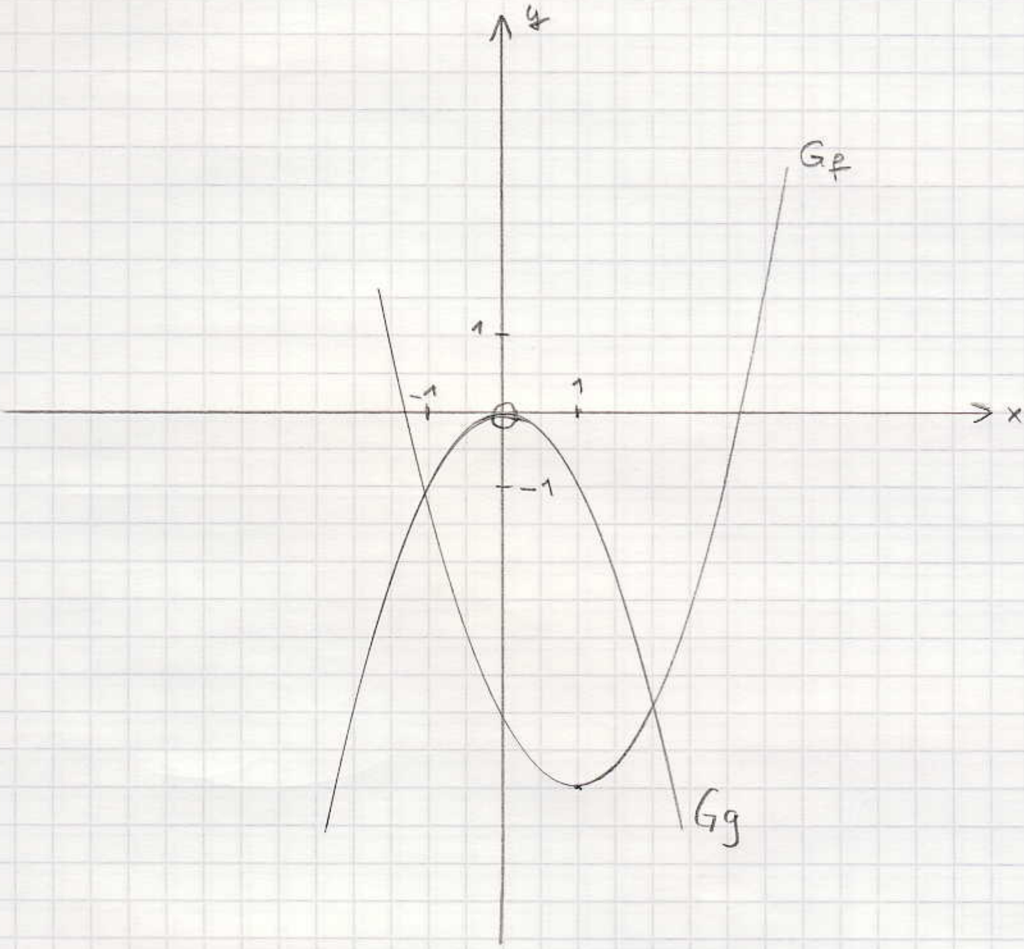
b) SP. mit Koordinatenachsen

c) SP. beider Graphen

a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$

$= (x-1)^2 - 1^2 - 4$

$= (x-1)^2 - 5$



b) $f(x) = x^2 - 2x - 4 \rightsquigarrow S_y(0|-4)$

$g(x) = -x^2 \rightsquigarrow S_y(0|0)$

$f(x) = x^2 - 2x - 4 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2}(+2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot -4})$

$\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{5}$

$x_2 = 1 - \sqrt{5}$

$N_1(1+\sqrt{5}|0) \quad N_2(1-\sqrt{5}|0)$

$g(x) = -x^2 \rightsquigarrow N(0|0)$

c) $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 4 = -x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{4}(2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1(-4)})$

$x_1 = 2 \qquad g(2) = -2^2 = -4 \Rightarrow S_1(2|-4)$

$x_2 = -1 \qquad g(-1) = -(-1)^2 = -1 \Rightarrow S_2(-1|-1)$